**\_\_\_\_**

**|\_\_\_ \**

**\_\_) |**

**/ \_\_/**

**|\_\_\_\_\_|**

**\_\_ \_\_ \_ \_ \_**

**| \/ | \_\_\_ \_\_| | \_\_\_| | \_\_ \_ (\_) \_\_\_**

**| |\/| |/ \_ \ / \_` |/ \_ \ |/ \_` || |/ \_ \**

**| | | | (\_) | (\_| | \_\_/ | (\_| || | \_\_/**

**|\_| |\_|\\_\_\_/ \\_\_,\_|\\_\_\_|\_|\\_\_,\_|/ |\\_\_\_|**

**|\_\_/**

**\_ \_\_\_\_ \_ \_**

**\_\_| | \_\_\_ | \_ \ \_ \_\_ \_\_\_ | |\_\_ | | \_\_\_ \_ \_\_ \_\_\_ \_\_ \_ \_\_\_**

**/ \_` |/ \_ \ | |\_) | '\_\_/ \_ \| '\_ \| |/ \_ \ '\_ ` \_ \ / \_` / \_\_|**

**| (\_| | \_\_/ | \_\_/| | | (\_) | |\_) | | \_\_/ | | | | | (\_| \\_\_ \**

**\\_\_,\_|\\_\_\_| |\_| |\_| \\_\_\_/|\_.\_\_/|\_|\\_\_\_|\_| |\_| |\_|\\_\_,\_|\_\_\_/**

**Contenido.**

**==========**

**1. Introducción.**

**2. El Fabricante de Colchones.**

**3. Patitas Felices.**

**4. El Problema de la Dieta.**

**5. Fábrica de Computadoras.**

**6. Producción e Inventarios.**

**7. Las Minas de Talamanca.**

**8. Planificación Agrícola.**

**9. La Refinería de Petróleo CBA.**

**10. Mezcla de una Planta Química.**

**11. Resumen.**

**12. Ejercicios.**

**1. Introducción.**

**================**

**La primera etapa para utilizar el método de programación lineal consiste en la formulación de un modelo matemático. Este modelo matemático se debe construir antes de utilizar el algoritmo de solución.**

**La formulación de un modelo es el proceso que transforma un problema del mundo real en un conjunto de ecuaciones. Usualmente los problemas se presentan verbalmente o de forma escrita. Se recomienda seguir los siguientes pasos para convertir un problema en un modelo matemático lineal:**

**Paso 1: Determine las variables del problema. Esto consiste en determinar qué variables se deben calcular.**

**Paso 2: Escriba la función objetivo. Determine si se trata de un problema de maximización o de minimización.**

**Paso 3: Escriba las restricciones que limitan la función objetivo.**

**Paso 4: Recuerde las condiciones de no negatividad, o bien de variables enteras.**

**En el presente capítulo tomaremos varios problemas y se verá como pueden escribirse como un modelo de programación lineal. Conforme se avanza se presentarán modelos de mayor complejidad.**

**2. El Fabricante de Colchones.**

**==============================**

**Un fabricante de colchones tiene 550 unidades de materia prima de madera y 2600 horas disponibles durante las cuales fabricará colchones tipo King y colchones tipo Luxor. Con anterioridad, se han vendido bien los dos modelos, de manera que se limitará a producir estos dos. Se estima que los colchones tipo King requieren de 20 unidades de madera y 70 horas de tiempo, mientras que los tipo Luxor requieren de 10 unidades de madera y 80 horas de tiempo disponible. Los colchones King se venden a $120 y los Luxor se venden a $85. ¿Cuántos colchones de cada modelo debe fabricar si desea maximizar sus ingresos por ventas?**

**R/**

**Las variables que se utilizarán son:**

**K: número de colchones tipo King.**

**L: número de colchones tipo Luxor.**

**La función objetivo busca maximizar el ingreso:**

**max z = 120 K + 85 L**

**Existe una restricción con respecto a la materia prima disponible:**

**20 K + 10 L <= 550**

**Existe otra restricción adicional con respecto a las horas disponibles para la fabricación:**

**70 K + 80 L <= 2600**

**Por último las cantidades que se producen no puede ser negativas, por lo que las variables deben ser mayores que cero.**

**K >= 0**

**L >= 0**

**Al unir estas restricciones se obtiene el siguiente problema:**

**Función Objetivo:**

**(0) max z = 120 K + 85 L**

**Restricciones:**

**(1) 20 K + 10 L <= 550**

**(2) 70 K + 80 L <= 2600**

**No Negatividad**

**(3) K,L >= 0**

**3. Patitas Felices.**

**===================**

**La compañía Patitas Felices es una fábrica de alimento para perros. Dentro de sus productos prepara una comida la cual se fabrica con base en una combinación de carne molida de res y cerdo. La carne de res contiene 0.80 de proteína y 0.20 de grasa por kilo, con un costo de $0.80 por kilo. La carne de cerdo tiene un 0.68 de proteina y un 0.32 de grasa por kilo, con un costo de $0.60 por kilo. Se desea que la comida para perro tenga un costo mínimo y un contenido de grasa menor o igual al 0.25 por kilo. Se modelará el problema de manera tal que se pueda obtener la combinación para producir 100 kilos de alimento que se debe utilizar para lograr estos objetivos.**

**R/**

**Las variables para el presente problema son:**

**R: número de kilos de carne molida de res**

**C: número de kilos de carne molida de cerdo**

**La función objetivo busca minimizar costos:**

**min z = 0.80 R + 0.60 C**

**Cada kilo de comida que se fabrique tendrá un 0.20 de grasa proveniente de la carne de res y un 0.32 de grasa proveniente de la carne de cerdo. Uno de los objetivos que se busca es que el nivel de grasa no exceda el 0.25 por kilo. Adicionalmente se debe tomar en cuenta que se desean producir 100 kilos.**

**0.20 R + 0.32 C <= 0.25 \* 100**

**0.20 R + 0.32 C <= 25**

**La segunda parte del problema indica que se deben producir 100 kilos de alimento, por lo tanto la suma de lo que se produzca debe ser igual a 100.**

**R + C = 100**

**Por último la cantidad de carne que se utilice no puede ser negativa, por lo que las variables deben ser mayores que cero.**

**R >= 0**

**C >= 0**

**Finalmente se obtiene el siguiente problema:**

**Función Objetivo:**

**(0) min z = 0.80 R + 0.60 C**

**Restricciones:**

**(1) 0.20 R + 0.32 C <= 25**

**(2) 1.00 R + 1.00 C = 100**

**No Negatividad**

**(3) R,C >= 0**

**4. El Problema de la Dieta.**

**===========================**

**En un centro de nutrición para infantes se desea obtener la dieta de más bajo costo que cumpla con unos requisitos determinados. Para ello se cuenta con los alimentos A,B y C los cuales contienen diferentes cantidades de nutrientes. Los nutrientes son ácido fólico, fósforo e hierro. La cantidad de cada nutriente que se encuentra en los alimentos se muestra en la siguiente tabla, expresada en miligramos por onza.**

**--------------------------------------------------**

**Nutriente Alimento A Alimento B Alimento C**

**--------------------------------------------------**

**A-fólico 0.12 mg/oz 0.10 mg/oz 0.08 mg/oz**

**Fósforo 0.75 mg/oz 1.70 mg/oz 1.30 mg/oz**

**Hierro 1.20 mg/oz 1.10 mg/oz 1.15 mg/oz**

**--------------------------------------------------**

**El costo del alimento A es de $2 por onza, el costo del alimento B es de $1.70 por onza y el costo del alimento C es de $1.80 por onza. Los requerimientos de estos nutrientes son de al menos 1.00 mg de ácido fólico. Al menos 7.50 mg de fósforo. Al menos 10 mg de hierro, pero no se debe superar los 16 mg de este nutriente.**

**Se desea saber la cantidad de alimentos que deben consumir si se desean respetar las requerimientos de nutrientes al menor costo posible.**

**R/**

**Las variables de decisión serán:**

**A: cantidad de onzas que se deben consumir del alimento A.**

**B: cantidad de onzas que se deben consumir del alimento B.**

**C: cantidad de onzas que se deben consumir del alimento C.**

**La función será minimizar el costo de los alimentos:**

**min z = 2.00 A + 1.70 B + 1.80 C**

**La restricción de ácido fólico indica que:**

**0.12 A + 0.10 B + 0.08 C >= 1.00**

**La restricción de fósforo indica que:**

**0.75 A + 1.70 B + 1.30 C >= 7.50**

**La restricción de hierro indica que:**

**1.20 A + 1.10 B + 1.15 C >= 10.00**

**1.20 A + 1.10 B + 1.15 C <= 16.00**

**Las onzas de alimento consumido no pueden ser negativas por lo que:**

**A >= 0**

**B >= 0**

**C >= 0**

**De esta forma, el planteamiento del problema anterior se puede presentar como:**

**Función Objetivo:**

**(0) min z = 2.00 A + 1.70 B + 1.80 C**

**Restricciones:**

**(1) 0.12 A + 0.10 B + 0.08 C >= 1.00**

**(2) 0.75 A + 1.70 B + 1.30 C >= 7.50**

**(3) 1.20 A + 1.10 B + 1.15 C >= 10.00**

**(4) 1.20 A + 1.10 B + 1.15 C <= 16.00**

**No Negatividad**

**(6) A,B,C >= 0**

**5. Fábrica de Computadoras.**

**===========================**

**Un fabricante tiene que producir esta semana cuatro modelos diferentes de computadoras. Estas han sido clasificadas como los modelos A, B, C y D. Cada uno de estos modelos debe ensamblarse y probarse. Los modelos requieren 4, 5, 3 y 5 horas respectivamente para el ensamblado y requieren de 2, 1.5, 3 y 4 horas respectivamente para pruebas. Las ganancias por modelo son $700, $700, $600 y $900. El fabricante tiene 750 ensambladores trabajando 40 horas por semana lo que le proporciona 30,000 horas disponibles para ensamblar estos productos. Además 500 personas trabajando 40 horas por semana lo que le proporciona 20,000 horas disponibles para pruebas. ¿Cuántas unidades de cada modelo debe producir el fabricante durante esta semana para maximizar sus ganancias?**

**R/**

**Las variables para el presente problema son:**

**A: número del modelo A para producir esta semana.**

**B: número del modelo B para producir esta semana.**

**C: número del modelo C para producir esta semana.**

**D: número del modelo D para producir esta semana.**

**Se desea maximizar las ganancias de la venta:**

**max z = 700 A + 700 B + 600 C + 900 D**

**Para el ensamblado se tiene una restricción de horas:**

**4 A + 5 B + 3 C + 5 D <= 30000**

**Para las pruebas se tiene una restricción de horas:**

**2 A + 1.5 B + 3 C + 4 D <= 20000**

**De igual manera, las cantidades producidas no pueden ser negativas:**

**A >= 0**

**B >= 0**

**C >= 0**

**D >= 0**

**De esta forma, el planteamiento del problema anterior se puede presentar como:**

**Función Objetivo:**

**(0) max z = 700 A + 700 B + 600 C + 900 D**

**Restricciones:**

**(1) 4 A + 5.00 B + 3 C + 5 D <= 30000**

**(2) 2 A + 1.50 B + 3 C + 4 D <= 20000**

**No Negatividad**

**(6) A,B,C,D >= 0**

**6. Producción e Inventarios.**

**============================**

**Un compañía fabrica un producto único. La demanda para los próximos cuatro meses es de 1000 unidades para el primer mes, 800 unidades para el segundo mes, 1200 unidades para el tercer mes y 900 unidades para el último mes.**

**El costo de producción de los artículos varía de mes a mes, debido al aumento en la materia prima. Para el primer mes el costo de producción es de $10, para el segundo mes $20, para el tercer mes $10 y para el cuarto mes $20 por artículo. Un mes dado se pueden producir más artículos de lo necesario, los cuales se pueden guardar como inventario a un costo de almacenamiento de $3 por unidad.**

**A continuación se presenta una tabla con estos datos:**

**--------------------------------------------**

**No. Mes Demanda Costo Inventario**

**--------------------------------------------**

**1 Enero 1000 $10 $3**

**2 Febrero 800 $20 $3**

**3 Marzo 1200 $10 $3**

**4 Abril 900 $20 $3**

**--------------------------------------------**

**Total 3900**

**--------------------------------------------**

**Se desea encontrar una política de producción óptima que minimice los costos totales.**

**R/**

**Se utilizan las variables:**

**x1: producción normal de enero**

**x2: producción normal de febrero**

**x3: producción normal de marzo**

**x4: producción normal de abril**

**i1: inventario de enero**

**i2: inventario de febrero**

**i3: inventario de marzo**

**Se desea minimizar el costo de producción y el costo de mantener inventario, por lo que la función objetivo se puede plantear como:**

**min z = 10 x1 + 20 x2 + 10 x3 + 20 x4**

**+ 3 i1 + 3 i2 + 3 i3**

**En el primer mes se deben producir 1000 unidades. Si se producen más, para disminuir la producción en los siguientes meses, se debe pagar un costo de almacenamiento de $3 por unidad. De esta forma se obtiene la siguiente restricción para el primer mes de producción:**

**x1 = 1000 + i1**

**x1 - i1 = 1000**

**Para el segundo mes se cuenta con el inventario que se guardo del mes anterior, y se deben producir 800 unidades. Lo cual se refleja en la siguiente restricción:**

**i1 + x2 = 800 + i2**

**i1 + x2 - i2 = 800**

**x2 + i1 - i2 = 800**

**De manera similar para el tercer mes se tiene que:**

**i2 + x3 = 1200 + i3**

**i2 + x3 - i3 = 1200**

**x3 + i2 - i3 = 1200**

**En el último mes no se producirán inventarios, pues se ha finalizado el ciclo de producción. Por lo tanto la restricción se simplifica a:**

**i3 + x4 = 900**

**x4 + i3 = 900**

**Todas las variables deben ser no negativas por lo cual se agregan las restricciones de no negatividad.**

**x1,x2,x3,x4 >= 0**

**i1,i2,i3 >= 0**

**De esta forma, el planteamiento del problema anterior se puede presentar como:**

**Función Objetivo:**

**(0) min z = 10 x1 + 20 x2 + 10 x3 + 20 x4**

**+ 3 i1 + 3 i2 + 3 i3**

**Restricciones:**

**(1) 1 x1 - 1 i1 = 1000**

**(2) 1 x2 + 1 i1 - 1 i2 = 800**

**(3) 1 x3 + 1 i2 - 1 i3 = 1200**

**(4) 1 x4 + 1 i3 = 900**

**No Negatividad**

**x1,x2,x3,x4,i1,i2,i3 >= 0**

**7. Las Minas de Talamanca.**

**==========================**

**La Corporación Minera Talamanca opera tres minas que se dedican a la extracción de oro. El oro que se extrae tiene dos grados de pureza, uno de gran pureza denominado tipo A y otro de baja pureza denominado tipo B.**

**La capacidad diaria de producción de las minas así como sus costos de operación se presentan en la siguiente tabla, los niveles de extracción representan la capacidad diaria de extracción en kilos, los costos de operación se presentan en miles de dólares.**

**-----------------------------------------**

**Oro Oro Costo**

**TipoA TipoB Operación**

**(kilos) (kilos) (miles)**

**-----------------------------------------**

**Mina I 4 4 $20**

**Mina II 6 4 $22**

**Mina III 1 6 $18**

**-----------------------------------------**

**Se tiene un contrato en el que se ha comprometido a entregar 54 kilos de oro gran pureza (tipo A) y 65 kilos de oro de baja pureza (tipo B) dentro de 7 días. Si una mina no opera un día completo se le paga únicamente el tiempo del día que haya trabajado. Es decir, si una mina opera medio día costará la mitad del costo de operación indicado en la tabla.**

**Para el problema anterior se desea establecer el número de días que debe trabajar cada mina, de manera tal que los costos sean lo más bajo posibles. A continuación se modelará el problema anterior como un problema de programación lineal.**

**R/**

**Como siempre, lo primero que se deben establecer son las variables que se desea encontrar. En este caso, se desea encontrar el número de días que debe laborar cada mina.**

**M1: número de días que laborará la mina I.**

**M2: número de días que laborará la mina II.**

**M3: número de días que laborará la mina III.**

**La función objetivo busca minimizar los costos de operación:**

**min z = 20 M1 + 22 M2 + 18 M3**

**Y las restricciones que existen son las siguientes. Primero, la capacidad de producción de oro de alta pureza está dada por:**

**4 M1 + 6 M2 + 1 M3 >= 54**

**La capacidad de producción de oro de baja pureza está dada por:**

**4 M1 + 4 M2 + 6 M3 >= 65**

**Existen un conjunto de restricciones adicionales, primero que nada la producción se debe completar en 7 días, por lo que ninguna mina podrá trabajar más días que esos.**

**M1 <= 7**

**M2 <= 7**

**M3 <= 7**

**De igual manera, las variables xi deben ser no negativas, el menor número de días que puede trabajar una mina es 0.**

**M1 >= 0**

**M2 >= 0**

**M3 >= 0**

**De esta forma, el planteamiento del problema anterior se puede presentar como:**

**Función Objetivo:**

**(0) min z = 20 M1 + 22 M2 + 18 M3**

**Restricciones:**

**(1) 4 M1 + 6 M2 + 1 M3 >= 54**

**(2) 4 M1 + 4 M2 + 6 M3 >= 65**

**(3) 1 M1 <= 7**

**(4) 1 M2 <= 7**

**(5) 1 M3 <= 7**

**No Negatividad**

**(6) M1,M2,M3 >= 0**

**8. Planificación Agrícola.**

**==========================**

**Se cuenta con tres terrenos para sembrar. Cada terreno tiene un área cultivable con abastecimiento de agua. A continuación se muestra la descripción de los terrenos.**

**--------------------------------------------**

**Area utilizable Galones de Agua**

**Terreno (Hectáreas) (miles)**

**--------------------------------------------**

**1 400 600**

**2 600 800**

**3 300 375**

**--------------------------------------------**

**Los cultivos disponibles son papas, algodón y frijoles. Para cada uno de estos productos existe una cantidad máxima de hectáreas que se puede sembrar, pues no se dispone de más semillas o plantas, asimismo cada hectárea cultivada requiere de una cierta cantidad de agua. Por último se reciben diferentes ingresos por cada hectárea de producto vendida. Se debe modelar el problema con las restricciones presentadas tomando en cuenta que se desea maximizar las ganancias de las ventas de los cultivos.**

**---------------------------------------------------**

**Cuota Consumo de agua Ganancia**

**máxima miles de neta**

**Cultivo hectáreas galones/hectárea $/hectárea**

**---------------------------------------------------**

**Papas 600 3 $400**

**Algodón 500 2 $300**

**Frijoles 325 1 $100**

**---------------------------------------------------**

**R/**

**En este problema, las variables deben reflejar dos elementos, tanto el cultivo como el terreno donde se debe sembrar. Por ello se definen las variables de acuerdo a la siguiente tabla:**

**--------------------------**

**Terreno 1 2 3**

**--------------------------**

**Papas P1 P2 P3**

**Algodón A1 A2 A3**

**Frijoles F1 F2 F3**

**--------------------------**

**Por ejemplo la variable xP1 indica la cantidad de hectáreas de papas que se sembrarán en el terreno 1. De igual manera xF2 indica la cantidad de hectáreas de frijoles que se sembrarán en el terreno 2. De esta forma la función objetivo tratará de maximizar las ganancias, las cuales están dadas por:**

**max z = 400 (P1 + P2 + P3)**

**+ 300 (A1 + A2 + A3)**

**+ 100 (F1 + F2 + F3)**

**max z = 400 P1 + 400 P2 + 400 P3**

**+ 300 A1 + 300 A2 + 300 A3**

**+ 100 F1 + 100 F2 + 100 F3**

**Las primeras restricciones que se van a modelar tiene relación con la cantidad de tierra disponible:**

**P1 + A1 + F1 <= 400**

**P2 + A2 + F2 <= 600**

**P3 + A3 + F3 <= 300**

**Las restricciones siguientes reflejan las cantidades máximas que se pueden sembrar de cada cultivo:**

**P1 + P2 + P3 <= 600**

**A1 + A2 + A3 <= 500**

**F1 + F2 + F3 <= 325**

**Las restricciones siguientes reflejan la cantidad de agua disponible para los cultivos:**

**3 P1 + 2 A1 + 1 F1 <= 600**

**3 P2 + 2 A2 + 1 F2 <= 800**

**3 P3 + 2 A3 + 1 F3 <= 375**

**Como siempre se deben agregar las condiciones de no negatividad:**

**P1,P2,P3,A1,A2,A3,F1,F2,F3 >= 0**

**De esta forma, el planteamiento del problema anterior se puede presentar como:**

**Función Objetivo:**

**(0) max z = 400 P1 + 400 P2 + 400 P3**

**+ 300 A1 + 300 A2 + 300 A3**

**+ 100 F1 + 100 F2 + 100 F3**

**Restricciones:**

**( 1) P1 + A1 + F1 <= 400**

**( 2) P2 + A2 + F2 <= 600**

**( 3) P3 + A3 + F3 <= 300**

**( 4) P1 + P2 + P3 <= 600**

**( 5) A1 + A2 + A3 <= 500**

**( 6) F1 + F2 + F3 <= 325**

**( 7) 3 P1 + 2 A1 + 1 F1 <= 600**

**( 8) 3 P2 + 2 A2 + 1 F2 <= 800**

**( 9) 3 P3 + 2 A3 + 1 F3 <= 375**

**No Negatividad**

**(10) P1,P2,P3,A1,A2,A3,F1,F2,F3 >= 0**

**9. La Refinería de Petróleo CBA.**

**================================**

**En el siguiente ejemplo la Compañía Refinadora de Petróleo CBA produce dos tipos de gasolina, la regular y la súper. Ambas gasolinas se preparan con base en los inventarios que se poseen de petróleo refinado tipo N y de petróleo refinado tipo I.**

**Las características de la materia prima para generar la gasolina, o sea del inventario de petróleo refinado, son las siguientes:**

**---------------------------------------------**

**Tipo de Octanaje Inventario Costo**

**Petróleo barriles $/barril**

**---------------------------------------------**

**Petróleo N 90 70000 $30**

**Petróleo I 100 30000 $45**

**---------------------------------------------**

**La gasolina producida debe cumplir las siguientes especificaciones del mercado, las cuales están dadas por la siguiente tabla:**

**---------------------------------------------**

**Tipo de Octanaje Oferta Precio**

**Gasolina mínimo mínima venta**

**barriles por**

**por semana barril**

**---------------------------------------------**

**Regular 92 40000 $55**

**Súper 98 25000 $75**

**---------------------------------------------**

**Para resolver el problema anterior es necesario saber que cantidades de materia prima se deben mezclar para producir los dos tipos de gasolina que se requieren. El objetivo general del problema es producir la gasolina con las condiciones deseadas, tratando de maximizar los ganancias, que en este caso están dados por la diferencia entre el costo del petróleo y el precio al cual se vende la gasolina.**

**R/**

**Para resolver este problema se deben contar con las siguientes variables:**

**NR: barriles de petróleo tipo "N" para producir gasolina regular.**

**NS: barriles de petróleo tipo "N" para producir gasolina súper.**

**IR: barriles de petróleo tipo "I" para producir gasolina regular.**

**IS: barriles de petróleo tipo "I" para producir gasolina súper.**

**De forma tabular las variables se utilizan de la siguiente manera:**

**--------------------------------------**

**Gasolina Gasolina**

**Regular Super**

**--------------------------------------**

**Petróleo N NR NS**

**Petróleo I IR IS**

**--------------------------------------**

**Con las variables anteriores se pueden realizar los siguientes cálculos:**

**Barriles de Petróleo N utilizado: (NR + NS).**

**Barriles de petróleo I utilizado: (IR + IS).**

**Barriles de gasolina regular producidos: (NR + IR).**

**Barriles de gasolina súper producidos: (NS + IS).**

**Función Objetivo.**

**-----------------**

**La función objetivo debe expresar la diferencia del precio de venta de los barriles de gasolina producidos, con respecto al costo de los barriles de petróleo utilizados para su fabricación.**

**max z = 75(NS + IS) + 55(NR + IR) - 45(IR + IS) - 30(NR + NS)**

**La cual se puede convertir en:**

**z = 75(NS + IS) + 55(NR + IR) - 45(IR + IS) - 30(NR + NS)**

**z = 75 NS + 75 IS + 55 NR + 55 IR - 45 IR - 45 IS - 30 NR - 30 NS**

**z = (75 NS - 30 NS) + (75 IS - 45 IS) + (55 NR - 30 NR) + (55 IR - 45 IR)**

**z = 45 NS + 30 IS + 25 NR + 10 IR**

**Para convertirse en:**

**max z = 45 NS + 30 IS + 25 NR + 10 IR**

**Restricciones.**

**--------------**

**Barriles de petróleo tipo N disponibles.**

**NR + NS <= 70000**

**Barriles de petróleo tipo I disponibles.**

**IR + IS <= 30000**

**Oferta mínima de gasolina regular.**

**NR + IR >= 40000**

**Oferta mínima de gasolina súper.**

**NS + IS >= 25000**

**Falta considerar el elemento del octanaje. Para lograr el octanaje deseado se debe realizar una mezcla. Por ejemplo si se mezclan 25 barriles de petróleo tipo N, con 25 barriles de petróleo tipo I se obtienen 50 barrilles con un octanaje de 95.**

**(100 \* 25) + (90 \* 25)**

**---------------------- = 95.00**

**(25 + 25)**

**Si se mezclan 20 barriles de petróleo tipo N con 30 barriles de petróleo tipo I se obtienen 50 barriles con un octanaje de 96.00.**

**(100 \* 30) + (90 \* 20)**

**---------------------- = 96.00**

**(20 + 30)**

**Para obtener el octanaje de la gasolina regular se debe realizar una mezcla de la forma:**

**(100 \* IR) + (90 \* NR)**

**---------------------- >= 92**

**(IR + NR)**

**(100 \* IR) + (90 \* NR) >= 92 (IR + NR)**

**100 IR + 90 NR >= 92 IR + 92 NR**

**100 IR + 90 NR - 92 IR - 92 NR >= 0**

**100 IR - 92 IR + 90 NR - 92 NR >= 0**

**8 IR - 2 NR >= 0**

**Para obtener el octanaje de la gasolina súper se debe realizar una mezcla de la forma:**

**(100 \* IS) + (90 \* NS)**

**---------------------- >= 98**

**(IS + NS)**

**100 IS + 90 NS >= 98 (IS + NS)**

**100 IS + 90 NS >= 98 IS + 98 NS**

**100 IS - 98 IS + 90 NS - 98 NS >= 0**

**2 IS - 8 NS >= 0**

**Si se combinan todas las ecuaciones anteriores obtenemos el siguiente sistema de ecuaciones:**

**Función Objetivo:**

**(0) max z = 45 NS + 30 IS + 25 NR + 10 IR**

**Restricciones:**

**(1) 1 NR + 1 NS <= 70000**

**(2) 1 IR + 1 IS <= 30000**

**(3) 1 NR + 1 IR >= 40000**

**(4) 1 NS + 1 IS >= 25000**

**(5) 8 IR - 2 NR >= 0**

**(6) 2 IS - 8 NS >= 0**

**Restricciones de no negatividad:**

**(7) NR,NS,IR,IS >= 0**

**10. Mezcla de una Planta Química.**

**=================================**

**Una planta química fabrica las pinturas A y B mediante dos procesos productivos que se denominarán I y II. Tanto A como B deben pasar por ambos procesos. La tabla de los tiempos de producción en cada proceso y las ganancias se presenta a continuación.**

**-----------------**

**Proceso A B**

**-----------------**

**I 2 3**

**II 3 4**

**-----------------**

**Ganancia $4 $10**

**-----------------**

**Se dispone de 16 horas de operación del proceso I y de 24 horas de operación del proceso II. La producción de B genera además un subproducto C sin ningún costo adicional. El subproducto C puede venderse a $3 por unidad, sin embargo la demanda de C se estima a lo sumo en 5 unidades y el sobrante de C debe destruirse con un costo de $2 por unidad. Se obtiene 1 unidad de C por cada 2 unidades producidas de B. Construya un modelo lineal del presente problema si se desean maximizar las ganancias.**

**R/**

**Se utilizarán las siguientes variables:**

**A: cantidad de producto A**

**B: cantidad de producto B**

**CV: cantidad de C vendida**

**CD: cantidad de C destruida**

**Observe que (CV + CD) es la cantidad producida de C.**

**La función objetivo:**

**max z = 4 A + 10 B + 3 CV - 2 CD**

**Los límites de tiempo dados por la tabla son:**

**2 A + 3 B <= 16**

**3 A + 4 B <= 24**

**La demanda de C es de 5 unidades a lo sumo:**

**CV <= 5**

**La producción de B indica la cantidad de subproducto C que se obtiene, cada dos unidades de B producen una unidad de C.**

**B = 2 (CV + CD)**

**B = 2 CV + 2 CD**

**B - 2 CV - 2 CD = 0**

**Se obtiene el siguiente planteamiento:**

**Función objetivo:**

**(0) max z = 4 A + 10 B + 3 CV - 2 CD**

**Restricciones:**

**(1) 2 A + 3 B <= 16**

**(2) 3 A + 4 B <= 24**

**(3) 1 CV <= 5**

**(4) 1 B - 2 CV - 2 CD = 0**

**Restricciones de no negatividad:**

**(5) A,B,CV,CD >= 0**

**11. Resumen.**

**============**

**En el presente capítulo se ha analizado como formular un problema lineal. En particular se han presentado problemas con variables sencillas y con matrices de variables.**

**Cuando se trabaja con problemas reales transformarlos a modelos lineales no es una tarea sencilla. Cuando un problema se modela mediante esta técnica se debe tomar el cuenta los elementos que se desestiman o bien que no se pueden modelar adecuadamente.**

**La única manera de aprender a modelar es practicando. Cada modelo resuelto se convierte en un ejemplo base que sirve para resolver un problema posterior.**

**+++**

**12. Ejercicios.**

**===============**

**() Ejercicio 1.**

**Kioto Incomodoto ha desarrollado dos tipos de sillas que vende en sus tiendas de todo el país. Como estas sillas son extremadamente caras, existe un mercado muy selecto donde siempre es posible vender toda la producción. Por esta misma razón, la fábrica se limita a una capacidad de trabajo de 50 horas semanales. La silla tipo 1 se produce en 3.50 horas y se puede vender en $280 por unidad, la silla 2 requiere de 4.00 horas para su producción y se vende en $310 por unidad. Modele el siguiente problema para determinar cuántas sillas de cada tipo se pueden producir, si se desea maximizar las ganancias.**

**() Ejercicio 2.**

**En una finca para caballos, se ha determinado que cada animal debe recibir diariamente al menos 70 unidades de proteína, 100 unidades de carbohidratos y 20 unidades de grasa. Se dispone actualmente de seis tipos de alimentos que tienen las siguientes características. Todas las cantidades están dadas en unidades por onza.**

**------------------------------------------------------**

**Alimento Proteínas Carbohidratos Grasa Costo**

**u/onza u/onza u/onza $/onza**

**------------------------------------------------------**

**1 22 52 4 $2**

**2 31 33 9 $3**

**3 42 21 11 $5**

**4 40 25 12 $6**

**5 45 50 9 $8**

**6 30 20 10 $9**

**------------------------------------------------------**

**Construya un modelo de programación lineal que pueda satisfacer las necesidades alimenticias de los animales a un costo mínimo.**

**() Ejercicio 3.**

**Una fábrica local produce cuatro tipos diferentes de automóviles que deben construir el motor, armar la carrocería y realizar ensamblaje final. Las necesidades específicas de tiempo, dadas en horas, para cada producto son las siguientes:**

**-------------------------------------------**

**Producto Horas Horas Horas**

**Motor Carrocería Ensamblaje**

**-------------------------------------------**

**1 3 1 2**

**2 2 1 1**

**3 2 2 2**

**4 4 3 1**

**-------------------------------------------**

**La compañía dispone semanalmente de 480 horas para la construcción de motores, 400 horas para el montaje de la carrocería y 400 horas para el ensamblaje final. Las ganancias unitarias por producto son $60000, $40000, $60000 y $80000 respectivamente. La compañía tiene un contrato con un distribuidor el cual indica que semanalmente se deben entregar un mínimo de 50 unidades del producto 1 y un mínimo de 100 unidades de cualquier combinación de productos 2,3 pero sólo un máximo de 25 unidades del producto 4. Formule un modelo de programación lineal para resolver este problema.**

**() Ejercicio 4.\***

**Un proveedor debe preparar 500 galones de una bebida muy saludable pero de aspecto y sabor horroroso. Para ello cuenta con 5 extractos existentes con distintos contenidos de vegetales. La bebida debe contener por lo menos 20% de de apio, 10% de berenjena y 5% de chile. Los datos de los distintos extractos se presentan a continuación.**

**--------------------------------------------------------------------**

**Extracto %Apio %Berenjena %Chile Galones Costo por Galón**

**--------------------------------------------------------------------**

**1 40 40 0 200 $1.50**

**2 5 10 20 400 $0.75**

**3 100 0 0 100 $2.00**

**4 0 100 0 50 $1.75**

**5 0 0 0 800 $0.25**

**--------------------------------------------------------------------**

**Construya un modelo de programación lineal que pueda satisfacer las necesidades alimenticias a un costo mínimo.**

**() Ejercicio 5.**

**Una grupo de estudiantes de computación ha reunido $250,000 invertir en acciones de diferentes empresas. Hay siete empresas disponibles, los costos de las acciones y la rentabilidad mensual se muestran continuación.**

**--------------------------------------**

**Rentabilidad**

**Empresa Costo Mensual**

**------------------------------------**

**A 145000 20000**

**B 92000 17000**

**C 70000 15000**

**D 70000 15000**

**E 84000 10000**

**F 15000 8000**

**G 47000 5000**

**------------------------------------**

**Formule un modelo de programación lineal, de manera tal que con el dinero disponible se pueda maximizar la rentabilidad de la inversión.**

**() Ejercicio 6.\***

**Una fábrica de microprocesadores produce un módulo específico, el cual se suministra a cuatro diferentes fabricantes de computadoras. El módulo puede producirse en cualquiera de las tres plantas de la corporación, aunque los costos varían debido a la eficiencia del personal, localización de la planta, salarios pagados localmente, etc. Por ejemplo producir un módulo en la planta A cuesta $110, en la planta B $95 y en la planta C cuesta $103. Las capacidades mensuales de producción en cada planta son 7,500 en planta A, 10,000 en la planta B y 8,100 en la planta C. Las estimaciones sobre las ventas indican que el fabricante de computadoras número 1 necesitará 4200 unidades, el fabricante 2 necesitará 8300 unidades, el fabricante 3 necesitará 6300 unidades y el fabricante 4 necesitará 2700 unidades. Asimismo los costos de envío de cada módulo hacia los fabricantes se indica mediante la siguiente tabla.**

**------------------------------------------------------**

**Fábrica-1 Fábrica-2 Fábrica-3 Fábrica-4**

**------------------------------------------------------**

**Planta A 11 13 9 19**

**Planta B 12 16 10 14**

**Planta C 14 13 12 15**

**------------------------------------------------------**

**Construya un modelo de programación lineal, de manera tal que se cumplan todas las condiciones expuestas y que tenga un costo total mínimo.**

**() Ejercicio 7.**

**En la carnicería de El Perro Loco se encuentran en la mañana del sábado con una existencia de 300 libras de pollo, 800 libras de res y 150 libras de cerdo. Se deben preparar tres tipos de tortas para hamburguesas, la económica, la popular y la selecta. Usualmente la demanda de estos productos es más de lo que tiene la tienda, por lo que se puede decir que todo lo que se produce se podrá vender. A continuación se muestra la composición de las tortas.**

**Una libra de una tortas económica debe tener 20% de pollo y 50% de res.**

**Una libra de una torta popular deben tener 50% de res y 20% de cerdo.**

**Una libra de una torta selecta debe tener 10% de pollo, 40% de res y 30% de cerdo.**

**El resto de cada producto lo constituye un relleno barato del cual se tiene una cantidad ilimitada. Este relleno no está hecho de ningún tipo de carne y le aseguro que usted no desea saber de qué es.**

**Formule un modelo lineal que resuelva el anterior problema si se desea que sobre la menor cantidad posible de pollo, res y cerdo.**

**Sugerencia: Utilice las siguientes variables:**

**xe: cantidad de libras para tortas económicas.**

**xp: cantidad de libras para tortas populares.**

**xs: cantidad de libras para tortas selectas.**

**Y observe que se desea minimizar el sobrante.**

**() Ejercicio 8.**

**Despacio y Aburrido (DA) es una fábrica de carros eléctricos. En la actualidad producen dos modelos, el modelo I para 2 personas y el modelo II para 5 personas. Estos carros se fabrican en tres plantas diferentes. La planta A produce diariamente 40 carros modelo I y 35 carros modelo II. La planta B produce diariamente 65 carros modelo I y 0 carros modelo II. La planta C produce diariamente 0 carros modelo I y 53 carros modelo II. El costo diario de operación de la planta A es de $210000. El costo diario de operación de la planta B es de $190000 y el costo diario de operación de la planta C es de $182,000. Con la información anterior se desea establecer el número de días que debe operar cada planta durante los próximos 30 días para lograr una producción de 1500 carros tipo I y 1100 carros tipo II de manera tal que se minimicen los costos.**

**() Ejercicio 9.**

**A continuación se presenta un problema muy popular conocido como el problema de la mochila. Suponga que se cuenta con una mochila que soporta un peso máximo de 160 kilos. Y se cuenta con una gran cantidad de objetos, donde cada uno tiene un cierto peso y un cierto valor. El objetivo es llenar la mochila de manera tal que no se exceda el peso permitido y se lleven los objetos que más valor tengan.**

**A continuación se presenta una tabla con los objetos:**

**---------------------**

**Objeto Peso Valor**

**(kg) ($)**

**---------------------**

**1 52 1000**

**2 23 600**

**3 35 700**

**4 15 150**

**5 17 150**

**----------------------**

**(a) Construya un modelo de programación lineal para solucionar este problema. Sugerencia utilice x1 cantidad de objetos 1 que llevo en la mochila, x2 cantidad de objetos 2 que se llevan y así sucesivamente.**

**(b) Este problema la solución debe ser entera,**

**¿cómo convertiría la solución en una solución entera?**

**¿sería esa la solución correcta?**

**Justifique su Respuesta.**

**() Ejercicio 10.**

**Un centro comercial abre las 24 horas y requiere de un cierto número de policías para mantener el orden.**

**----------------------------**

**Período Hora Policías**

**----------------------------**

**1 [08,12[ 4**

**2 [12,16[ 8**

**3 [16,20[ 10**

**4 [20,24[ 7**

**5 [24,04[ 12**

**6 [04,08[ 4**

**-----------------------------**

**El período 1 sigue inmediatamente después del período 6. Un policía debe trabajar 8 horas consecutivas, empezando al inicio de uno de los períodos. Con base en la información anterior determine el personal que debe trabajar en cada turno si se desea minimizar el número de policías que se utilizan, a la vez que se respetan las restricciones mencionadas.**

**() Ejercicio 11.**

**La fábrica de dulces tóxicos ToxiMent tiene en sus bodegas 2,200 cajas de dulces. Actualmente hay 1,000 cajas en la fábrica 1 y 1,200 cajas en la fábrica 2. Se han recibido pedidos por tres tiendas localizadas en diferentes zonas del país. En la primera tienda se necesitan 1,000 cajas, en la segunda tienda 700 cajas y en la tercera 500 cajas. Los costos unitarios de envío por caja se muestran en la siguiente tabla.**

**------------------------------------------------**

**Período Tienda1 Tienda2 Tienda3 Oferta**

**------------------------------------------------**

**Fábrica 1 14 13 11 1000**

**Fábrica 2 13 15 12 1200**

**------------------------------------------------**

**Demanda 1,000 700 500**

**------------------------------------------------**

**Con base en la información anterior construya un modelo de programación lineal, si se desean satisfacer todos los pedidos de manera tal que haga con el mínimo costo posible.**

**() Ejercicio 12.**

**Se tienen cuatro programas que deben ser asignados a cuatro "clusters" de procesadores para su ejecución. El tiempo de ejecución en cada clusters es ligeramente variable y se muestra en la tabla siguiente:**

**----------------------------------------------------**

**Período Cluster1 Cluster2 Cluster3 Cluster4**

**----------------------------------------------------**

**Programa1 65 73 63 57**

**Programa2 67 70 65 58**

**Programa3 68 72 69 55**

**Programa4 66 75 70 59**

**-----------------------------------------------------**

**Construya un modelo lineal para asignar los programas a los clusters, de manera tal que el tiempo de ejecución de programas sea el menor posible.**

**() Ejercicio 13.**

**Una planta que produce materiales para la construcción es la suplidora a gran escala de una represa en construcción. En este proyecto se utiliza una mezcla de arena y piedra con una proporción de 0.30 y 0.70. La planta de materiales cuenta con 5 minas que cuentan con diferentes composiciones y costos, incluyendo el costo de transporte. A continuación se muestra la tabla con las cantidades de mezcla, costos, etc, por depósito.**

**--------------------------------------------------------------**

**Mezcla**

**Período Mina1 Mina2 Mina3 Mina4 Mina5 deseada**

**--------------------------------------------------------------**

**Arena 0.40 0.20 0.50 0.80 0.70 0.30**

**Piedra 0.60 0.80 0.50 0.20 0.30 0.70**

**Costo por kg 3.00 2.00 1.00 1.50 2.50 mínimo**

**--------------------------------------------------------------**

**Con base en la información anterior se desea conocer para cada kilo de mezcla extraído cuánto material de cada mina debe ser obtenido de manera tal que se obtenga la mezcla deseada a un costo mínimo.**

**() Ejercicio 14.**

**A continuación se presenta un problema muy conocido de mezcla de pinturas de Hamdy Taha de su libro de "Investigación de Operaciones".**

**La compañía de pinturas RMC produce dos pinturas de agua, denominadas pintura 1 y pintura 2. La pintura 1 se utiliza para los exteriores de las casas y la pintura 2 se utiliza para los interiores de las casas. Para la elaboración de las pinturas se utilizan dos materiales básicos A y B. La disponibilidad de A es de 6 toneladas diarias y la de B es de 8 toneladas diarias. Los requisitos diarios de materia prima por tonelada de pintura para exteriores o interiores se resume en la siguiente tabla.**

**--------------------------------------------------**

**Pintura1 Pintura2**

**Exterior Interior Disponibilidad**

**--------------------------------------------------**

**Materia A 1 2 6**

**Materia B 2 1 8**

**--------------------------------------------------**

**Un estudio ha establecido que la demanda máxima de pintura 2 (para interiores) no puede ser mayor de 2 toneladas diarias. Asimismo la demanda diaria de pintura 2 (para interiores) no puede ser mayor que la demanda de pintura 1 (para exteriores).**

**El precio de venta de la pintura 1 (para exteriores) es de $30 y de la pintura 2 (para interiores) es de $20.**

**(a) Formule un modelo para determinar cuántas toneladas de cada pintura se debe producir si se desean maximizar las ventas diarias.**

**(b) Resuelva el modelo anterior mediante el método gráfico.**

**() Ejercicio 15.**

**A continuación se presenta el famoso problema de la "Wyndor Glass Co" de Hillier y Lieberman de su libro "Introducción a la Investigación de Operaciones".**

**La Wyndor Glass Co produce artículos de vidrio de alta calidad, incluyendo ventanas y puertas de vidrio. Tiene tres plantas. Los marcos de aluminio se hacen en la planta 1, los marcos de madera en la planta 2 y la planta 3 se usa para producir el vidrio y montar los productos.**

**Debido a una disminución de las ganancias, el gerente general ha decidido reorganizar la línea de productos. Se están discontinuando varios productos poco rentables y esto libera la capacidad de producción para pensar en uno o dos nuevos productos potenciales que han sido solicitados. Uno de estos productos propuestos (producto 1) es una puerta de vidrio de 8 pies con un marco de aluminio. El otro (producto 2) es una ventana grande de 4x6 pies con un marco de madera y aluminio. Se ha determinado que se puede vender tanto de cualquiera de los dos productos como pueda producirse con la capacidad disponible. Sin embargo, como los dos productos competirán por la misma capacidad de producción de la planta 3, no se ve claro que mezcla entre los dos productos sería la más ventajosa.**

**Por lo tanto el gerente ha pedido a su departamento de Investigación de Operaciones que estudie esta cuestión. Al estudiar el caso del departamento de IO determinó de inmediato que se trata de un problema clásico de "mezcla de productos".**

**En la siguiente tabla se resumen la información de la capacidad de producción de las plantas, las unidades requeridas por producto y la utilidad de cada producto.**

**----------------------------------------------**

**Capacidad usada por: Capacidad**

**Producto1 Producto2 Disponible**

**----------------------------------------------**

**Planta 1 1 0 4**

**Planta 2 0 1 12**

**Planta 3 3 2 18**

**----------------------------------------------**

**Utilidad**

**por unidad $3 $5**

**----------------------------------------------**

**(a) Formule un modelo para determinar cuántas unidades de cada producto se deben fabricar si se desean maximizar las utilidades.**

**(b) Resuelva el modelo anterior mediante el método gráfico.**

**() Ejercicio 16.**

**Una escuela prepara una excursión para 400 alumnos. La empresa de transporte tiene 10 autobuses de 50 plazas y 8 autobuses de 40, pero solo dispone de 9 conductores. El alquiler de un autobus grande cuesta $80 y el de uno pequeño cuesta $60. Se desea estimar cuántos autobuses de cada tipo hay que utilizar para que la excursión resulte lo mas económica posible para la escuela. Puede encontrar la solución de este problema?**

**() Ejercicio 17.**

**Una empresa va a lanzar al mercado un nuevo producto. Los planes de promoción para el próximo mes están en marcha. Los medios alternativos para realizar la publicidad así como los costos y la audiencia estimada por cada comercial de publicidad se muestran a continuación :**

**------------------------------------**

**TV Radio Prensa**

**------------------------------------**

**Costo $2000 $300 $600**

**Audiencia 100000 18000 40000**

**------------------------------------**

**Para lograr un uso balanceado de los medios, la publicidad en radio debe ser igual al 50% de los comerciales de publicidad autorizados. Además la cantidad de comerciales**

**solicitadas en televisión debe ser al menos 10% del total autorizado. El presupuesto total para promociones se ha limitado $18500. Se necesita determinar el plan óptimo para maximizar la audiencia total o cantidad de personas que vean la publicidad.**

**() Ejercicio 18.**

**La compañía especies Indiacan, tiene un stock limitado de dos hierbas que se utilizan en la producción de aderezos. Indiacan usa los dos ingredientes, HB1 y HB2, para producir ya sea curry o pimentón. El departamento de mercadotecnia informa que aunque la empresa puede vender todo el pimentón que pueda producir, sólo puede vender hasta un máximo de 1500 botellas de curry. Las hierbas no utilizadas se pueden vender a $375 la onza de HB1 y a $167 la onza de HB2. Determine él consumo de especias que maximice el ingreso de la Empresa. Con base en la siguiente tabla de producción:**

**---------------------------------------------------------**

**Ingredientes**

**(oz/botella) Demanda Precio**

**Aderezo HB1 HB2 (botellas) ($/botella)**

**---------------------------------------------------------**

**Curry 5 3 1500 2750**

**Pimentón 2 3 sin límite 1300**

**---------------------------------------------------------**

**Inventario(oz) 10000 8500**

**---------------------------------------------------------**

**() Ejercicio 19.**

**Se desea obtener la mezcla de petróleo a partir de crudos de distintas procedencias, cada uno de los cuales tienen distintas características. En la tabla adjunta se detallan los distintos crudos, que en total son y sus características más importantes : el tanto por ciento de azufre, la densidad y el precio por barril.**

**---------------------------------------**

**Origen Azufre Densidad Precio**

**---------------------------------------**

**Kuwait 0.45 0.91 $35**

**Arabia 0.40 0.95 $31**

**Noruega 0.38 0.89 $39**

**Venezuela 0.41 0.92 $34**

**---------------------------------------**

**Se desea crear un barril de crudo donde la mezcla tenga unas características concretas que se traducen en un contenido de azufre de 0.40 y una densidad igual al 0.91. Además ell precio del barril mezclado debe ser el mínimo posible.**

**() Ejercicio 20.\*\*\***

**Aceros Fager explota dos minas para obtener mineral de hierro. Este mineral de hierro se envía a una de dos instalaciones de almacenamiento. Cuando se necesita se manda a la planta de acero de la compañía. Los siguientes diagramas describen la red de distribución, donde M1 y M2 son las dos minas, S1 y S2 los dos almacenes y P es la planta de acero. También muestra las cantidades producidas en las minas. al igual que el costo de envío y la cantidad máxima que se puede enviar al mes por cada vía. La Planta (P) requiere 100 toneladas de mineral de hiero.**

**---------------------------------------**

**Prod. Máximo Costo por**

**en envío Tonelada**

**Toneladas S1 S2 S1 S2**

**---------------------------------------**

**M1 40 30 30 $2000 $1700**

**M2 60 70 50 $1600 $1100**

**---------------------------------------**

**-------------------------**

**Máximo Costo por**

**envío Tonelada**

**P P**

**-------------------------**

**S1 70 $400**

**S2 70 $800**

**-------------------------**